

MATEMATIKA+ feladatok

2020. szeptember 15.

Teljes indukció. Erős teljes indukció.

T1. Egy téglalap alakú papírra rajzoljunk n egyenest, melyek a lap széléig elérnek. Így a lapot sokszög alakú tartományokra osztjuk. Igazoljuk, hogy ez a "térkép" kiszínezhető két színnel úgy, hogy a szomszédos részek különböző színűek legyenek.

T2. Egy tábla csokoládé n db kis négyzetből áll, amik szögletes módon vannak elrendezve. A táblát kis kockákra tördeljük, mindig a vonalak mentén egyenesen törve. Mennyi a legkevesebb számú törés (n függvényében)?

T3. Van egy kupacban n darab gyufaszál. A következő játékot játszuk:

1.) Két kisebb kupacot csinálunk: k és $n-k$ gyufaszállal. Ez $k(n-k)$ pontot ér.

2.) Minden lépésben valamelyik $m > 1$ elemű kupacot két kisebb részre osztunk: j és $m-j$ gyufaszállal. Ezért $j(m-j)$ jutalom pontot kapunk.

3.) Ha már minden kupac egyetlen gyufaszálból áll, a játéknak vége.

Mi a nyerő stratégia, ha maximális számú pontot szeretnénk összegyűjteni?

T4. Hol a hiba a következő teljes indukciós bizonyításban?

Állítás. Minden ló azonos színű.

Bizonyítás. Teljes indukció.

1.) Ha csak egyetlen ló van, annak egyetlen a színe.

2.) *Indukciós lépés.* Tfh. bárhogy választunk ki n db lovat, azok azonos színűek. Vegyünk $n+1$ lovat, számozzuk meg: $1, 2, \dots, n, n+1$. Vegyük az $\{1, 2, \dots, n\}$ és $\{2, \dots, n, n+1\}$ halmazokat. Mindkettő n elemű, tehát a lovak azonos színűek. Mivel van átfedés a két halmazban, ez a szín ugyanaz.

T5. A $G_0, G_1, G_2, G_3, \dots$ számok eleget tesznek a $G_n = 5G_{n-1} - 6G_{n-2}$ rekurziónak, továbbá $G_0 = 0$ és $G_1 = 1$. Igazoljuk, hogy $G_n = 3^n - 2^n$ teljesül minden n -re.

Valós számok

V1. Igaz vagy hamis? (Indokoljuk!)

- a.) $I_{n+1} \subset I_n$ korlátos és zárt intervallumsorozat metszete egy pont.
- b.) Ha $I_{n+1} \subset I_n$ korlátos intervallumsorozat *metszete nem üres*, akkor $\forall I_n$ zárt.
- c.) Ha $I_{n+1} \subset I_n$ korlátos intervallumsorozat *metszete üres*, akkor $\forall I_n$ nyílt.
- d.) Ha egymásba skatulyázott intervallumsorozat *metszete üres*, akkor van az intervallumok között nyílt.
- e.) Ha egymásba skatulyázott korlátos intervallumsorozat *metszete üres*, akkor van az intervallumok között nem zárt.
- f.) Ha egy zárt intervallumsorozat metszete nem üres, akkor az intervallumok egymásba vannak skatulyázva.

V2. $a, b, c > 0$. Igazoljuk az alábbi egyenlőtlenségeket:

1. $a + \frac{1}{a} \geq 2$. Mikor lehet egyenlőség?
2. $(a + b)(b + c)(c + a) \geq 8abc$.
3. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$. $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a + b + c)$.

Bónusz

M2.* Egy útelágazásnál lévő tanyán három testvér lakik, akik arról híresek, hogy közülük kettő igazmondó, egyikük pedig szeszélyes. Utóbbi néha igazat mond, máskor viszont nem.

Egy eltévedt vándor ennek ismeretében a testvérektől kér útbaigazítást. Két kérdést tehet fel egy-egy testvérnek, és az ezekre kapott válaszokból kell megállapítania a helyes utat.

Segítsünk neki: mi legyen a két kérdés?